Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V.

Satz: *(Cayley-Hamilton)* Für das charakteristische Polynom $\mathrm{char}_f(X)$ von f gilt

$$\mathrm{char}_f(f) = 0.$$

Beweis: B geordnete Basis in V; $A := {}_B[f]_B \rightsquigarrow$ Zu zeigen: $\varphi(A) = 0$.

$\varphi := \mathrm{char}_A$

Idee: $\varphi(X) = \det(X \cdot I_n - A)$

$\rightsquigarrow \varphi(A) \overset{?}{=} \det(A \cdot I_n - A) \overset{!}{=} \det(A - A) \overset{!}{=} \det(0_n) \overset{!}{=} 0$

$\boxed{\text{PSEUDOBEWEIS}}$

Wieso falsch? Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1..n}$

$\Rightarrow$ $X \cdot I_n - A = (X \cdot \delta_{ij} - a_{ij})_{i,j}$

$\Rightarrow$ $\varphi(X) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} (X \cdot \delta_{i,\sigma i} - a_{i,\sigma i})$

$$\mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \ni \varphi(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (A \cdot \delta_{i,\sigma i} - a_{i,\sigma i})$$

$$K \ni \det(A \cdot I_n - A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} \left((A I_n)_{i,\sigma i} - a_{i,\sigma i} \right)$$

Korrekter Beweis: Setze $B := X \cdot I_n - A^T \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K[X])$.

$$\Rightarrow \varphi(X) = \det(B).$$

$$B = (X \cdot \delta_{jk} - a_{kj})_{j,k=1..n}$$

Sei C die Adjunkte von $B \Rightarrow C \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K[X])$.

und $C \cdot B = \det(B) \cdot I_n = \varphi \cdot I_n$.

$C = (c_{ij})_{i,j}$ mit $c_{ij} \in K[X]$. | $CB = (c_{ij})(b_{jk}) = \left(\sum c_{ij} b_{jk}\right)_{i,k}$

$\Rightarrow \forall\, i,k: \quad \sum_j c_{ij} b_{jk} = \varphi \cdot \delta_{i,k}$. Gleichung in $K[X]$.

d.h. $\quad \varphi \cdot \delta_{ik} = \sum_j c_{ij}^{(X)} (X \delta_{jk} - a_{kj})$

$$\Rightarrow \forall i: \quad \varphi(A)\cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Standardbasis}}}{e_i} = \sum_k \varphi(A)\cdot \delta_{ik}\cdot e_k = \sum_{k,j} c_{ij}(A)\cdot (A\,\delta_{jk} - a_{kj})\, e_k$$

$$= \sum_j c_{ij}(A)\cdot \sum_k (A\,\delta_{jk} - a_{kj})\, e_k$$

$$= \sum_j c_{ij}(A)\cdot \Big(A\cdot \sum_k \delta_{jk}\, e_k - \sum_k a_{kj}\, e_k \Big)$$

$$= \sum_j c_{ij}(A)\cdot \underbrace{\Big(A\cdot e_j - (a_{kj})_{k=1..n} \Big)}_{\substack{j\text{-te Spalte von } A. \\ \shortparallel \\ 0}} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(A)\, e_i = (i\text{-te Spalte von } \varphi(A)) = 0$$

Variiere $i \Rightarrow \varphi(A) = 0$.

qed.

Folge: Das Minimalpolynom von f teilt das charakteristische Polynom von f.

Beweis: $\left.\begin{array}{l}\varphi = \text{Min. Pol.} \\ \psi = \text{char}_f\end{array}\right] \Rightarrow \left.\psi(f) = 0.\right\} \underset{\text{Def. von } \psi}{\Rightarrow} \varphi \mid \psi$ qed

Proposition: Für jede invertierbare Matrix A mit charakteristischem oder Minimal-Polynom $\sum'_{i\geqslant 0} a_i X^i$ ist $a_0 \neq 0$ und

$$A^{-1} = -\sum_{i\geqslant 1}{}' \frac{a_i}{a_0} A^{i-1}.$$

$\psi = \text{char}_f \Rightarrow \psi(X) = \pm\det(A) + \text{höhere Terme} \Rightarrow \psi(0) \neq 0.$

$\varphi = \text{Min. Pol} \Rightarrow \varphi \mid \psi \Rightarrow \varphi(0) \mid \psi(0) \Rightarrow \varphi(0) \neq 0.$

$\varphi(A) = \psi(A) = 0.$

d.h. $\sum_{i=0}^{n} a_i A^i = O_n.$

Beispiel: Für die Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{smallmatrix}\right)$ gilt $A^{-1} = 4I_2 - A$.

$a_0 I_n + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i A^{i-1}\right) A = O_n.$

$\Rightarrow \quad I_n = \underbrace{-\left(\sum \frac{a_i}{a_0} A^{i-1}\right)}_{=A^{-1}} A$ qed

$\text{char}_f(X) = \det(X I_n - A)$

$\Rightarrow \text{char}_f(0) = \det(-A) = \pm\det(A)$

$\text{char}_A(X) = X^2 - 4X + 1 \ldots$

9.3 Blocktrigonalisierung

Proposition: Für das charakteristische Polynom einer Blockdreiecksmatrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & A_r \end{pmatrix}$$

gilt

$$\mathrm{char}_A(X) = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{char}_{A_i}(X).$$

<u>Bew.</u>: $X \cdot I - A = \begin{pmatrix} X \cdot I - A_1 & & \cancel{*} \\ & \ddots & \\ 0 & & X \cdot I - A_r \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \det(X \cdot I - A) = \prod_{i=1}^{r} \det(X \cdot I - A_i)$. <u>qed</u>.

$\subset V$

Erinnerung: Ein Unterraum U mit $f(U) \subset U$ heisst *f-invariant*.

Proposition: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) Der Endomorphismus f ist *blocktrigonalisierbar*, das heisst, es existiert eine geordnete Basis B von V, so dass die Darstellungsmatrix ${}_B[f]_B$ eine Blockdreiecksmatrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$ ist für eine Zerlegung $n = n_1 + n_2$ mit $n_1, n_2 \geqslant 1$.

(b) Es existiert ein f-invarianter Unterraum $\{0\} \neq U \subsetneq V$.

(c) Das charakteristische Polynom $\mathrm{char}_f(X)$ ist reduzibel in $K[X]$.

Bew.: (a) $\Rightarrow$ (c): ${}_B[f]_B = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{char}_f(X) = \underbrace{\mathrm{char}_{A_1}(X)}_{\text{Grad } n_1 \geq 1} \cdot \underbrace{\mathrm{char}_{A_2}(X)}_{\text{Grad } n_2 \geq 1}.$

(b) $\Rightarrow$ (a): Wähle geord. Basis $(v_1, \dots, v_{n_1})$ von U $\quad 0 < n_1 < n$.

erweitern zu „ „ $B = (v_1, \dots, v_n)$ von V.

$${}_B[f]_B = (a_{ij}) \Rightarrow \forall j: f(v_j) = \sum_i a_{ij} v_i$$

Für $j \leq n_1$ ist $f(v_j) \in U \Rightarrow a_{ij} = 0$ für $i > n_1$.

$$\Rightarrow {}_B[f]_B = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, n_1 \\ \}\, n_2 \end{array}$$

(c) $\Rightarrow$ (b) Schreibe $\mathrm{char}_f(X) = \varphi_1(X)\cdot\varphi_2(X)$; $\underbrace{\deg(\varphi_1)}_{n_1}, \underbrace{\deg(\varphi_2)}_{n_2} > 0$.

$\Rightarrow \quad 0 = \mathrm{char}_f(f) = \varphi_1(f)\circ\varphi_2(f)$

Wähle $v \in V\setminus\{0\}$.

Fall $\varphi_2(f)(v) = 0$: Setze $U := \langle\{f^i(v) \mid 0 \le i < n_2\}\rangle$

$\deg(\varphi_2) = n_2$

$\varphi_2 = \sum_{i=0}^{n_2} a_i X^i$; $a_{n_2} = 1$.

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n_2} a_i f^i(v) = 0$.

$\Rightarrow 0 < \dim(U) \le n_2 < n := \dim(V)$.

mit $\forall\, 0 \le i \le n_2 - 2$: $f(f^i(v)) = f^{i+1}(v) \in U$.

$i = n_2 - 1$: $f(f^i(v)) = f^{n_2}(v) \in U$.

Fall $\varphi_2(f)(v) \neq 0$: $\Rightarrow f(U) \subset U$.

Setze $w := \varphi_2(f)(v) \in V\setminus\{0\}$.

$\Rightarrow \varphi_1(f)(w) = \varphi_1(f)\circ\varphi_2(f)(v) = 0$.

Ersetze v, φ_2 durch w, φ_1 $\rightsquigarrow$ genauso.

qed.

Definition: Die *Begleitmatrix* eines normierten Polynoms

$$\varphi(X) \;=\; X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$$

ist die folgende $n \times n$-Matrix:

$$A := \boxed{\begin{pmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ -a_0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}}$$

(Oft nimmt man auch die Transponierte, oder die durch Umkehren der Reihenfolge der Zeilen sowie der Spalten entstehende Matrix, oder die Transponierte davon.)

Proposition: Die Begleitmatrix von φ hat das charakteristische und das Minimalpolynom φ.

Bew.: Sei $\psi(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$ das Min. Pol., $b_k = 1$. Standardtrick.

$b_i = 0$ für $i > k$. n

$\varphi \mid$ char. Pol. $\Rightarrow k \leq n$.

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} b_i A^i = \psi(A) = 0. \quad \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} b_i (A^i \cdot e_n) = 0$

$\forall\, 1 < j \leq n: \; Ae_j = (j\text{-te Spalte von } A) = e_{j-1}$

$\Rightarrow \forall\, 0 \leq i < n: \; A^i e_n = e_{n-i}$

und $A^n e_n = Ae_1 = -\sum_{j=1}^{n} a_{n-j}\, e_j$

$\Downarrow$

$\sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot e_{n-i} - b_n \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{n-j}\, e_j = 0$

Falls $k < n$ ist, folgt $\sum_{i=0}^{k} b_i \cdot e_{n-i} = 0$, $b_k \neq 0$

$\Rightarrow$ Widerspruch zur lin. Unabh. der e_{n-i}.

Also $k = n$.
$\psi \mid$ char. Pol.

$\Rightarrow \psi =$ char. Pol.

Jetzt $b_n = 1$ da normiert. $\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} b_i e_{n-i} = \sum_{j=1}^{n} a_{n-j} e_j$

$$\overset{\shortparallel}{\sum_{j=1}^{n} b_{n-j} e_j}$$

$\Rightarrow \forall j: \; b_{n-j} = a_{n-j}$.

$$\Rightarrow \psi(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = \varphi(X).$$

<u>qed</u>.